Université Sidi Mohammed Ben abdellah **Année universitaire 2020-2021**
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées **Filière CP2 Algèbre 3**
Fès **H. Benbouziane**

Série de T.D. $N^\circ.1$
Applications Linéaires -Dualité

Exercice 0.1 ***S****oit* $\mathbb{R}_n[X]$ *l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à* n*, où* n *est un entier tel que* $n \geq 2$*.*

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ *telle que* $\varphi(P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k) = a_n$*.*

1. *Vérifier que* φ *est une forme linéaire.*
2. *En déduire que* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}_n[X]$*.*
3. *Déterminer tous les supplémentaires de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ *dans* $\mathbb{R}_n[X]$*.*

Exercice 0.2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$*.*

1. $\mathbb{R}^{n-1}$ *est il un hyperplan de* $\mathbb{R}^n$ *?*
2. *Donner la forme générale des formes linéaires sur* $\mathbb{R}^n$*. En déduire une caractérisation de ses hyperplan.*

Exercice 0.3 *Dans* $E = \mathbb{K}^n$ *où* $\mathbb{K}$ *est un corps (=* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) (*n *un entier non nul.)*
Soient $F = \{(x_1, ..., x_n) \in E : x_1 + ... + x_n = 0\}$ *et* $G = vect((1, ..., 1))$*.*

1. *Montrer que* F *est un sous esapce de* E*.*
2. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires de* E*. Préciser le projeté d'un vecteur* x *de* E *sur* F *parallèlement à* G *et sur* G *parallèlement à* F*.*

Exercice 0.4 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$*, muni de sa base canonique* $\mathfrak{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$*, on considère les vecteurs* $u_1 = (1, 0, 1)$*,* $u_2 = (0, 1, -1)$ *et* $u_3 = (1, 1, -1)$*.*

1. *Montrer que la famille* $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Déterminer sa base duale* $\mathfrak{B}^*$*. En déduire la matrice de passage* P *de* $\mathfrak{B}$ *à* $\mathfrak{B}_0$*.*
3. *On pose* $F = vect(u_1, u_2)$*. Montrer que* F *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$ *, puis vérifier que* $x - y - z = 0$ *est l' une de ses équations.*

Exercice 0.5 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$*, muni de sa base canonique* $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$*, on considère les vecteurs* $u_1 = (-3, -2, 7)$*,*$u_2 = (3, -1, -5)$ *et* $u_3 = (1, -3, 0)$*.*

1. *Montrer que la famille* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*. .*
2. *Déterminer sa base duale* $\mathcal{B}^*$*.*

Exercice 0.6 *Soit* $E = \mathbb{R}_3[X]$ *l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à* 3*. On considère les formes linéaires suivantes :* $\varphi_1(P) = P(0)$*,* $\varphi_2(P) = P'(0)$*,* $\varphi_3(P) = P(1)$ *et* $\varphi_4(P) = P'(1)$*.*

1. *Montrer que la famille* $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ *est base de l'espace dual* E^**.*
2. *Déterminer la base préduale de* $\mathcal{F}$
3. *On considère la forme linéiare définie par* $\psi(P) = \int_0^1 P(t)dt$*. Déterminer les coordonnées de* ψ *dans la base* $\mathcal{F}$*.*

Exercice 0.7 *Soit* $\mathbb{R}_2[X]$ *l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à* 2*. On considère* $F = \{P \in E / P(1) + P'(0) = 0\}$*.*

1. *Montrer que F est un hyperplan de E.*
2. *En déduire sa dimension, puis donner une base.*
3. *Donner toutes ses équations et tous ses supplémentaires dans E.*

Exercice 0.8 *Soit $E = \mathbb{R}_1[X] = \{aX + b : \quad a, b \in \mathbb{R}\}$.*
On considère les formes linéaires suivantes : $\varphi_1(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad \varphi_2(P) = \int_0^2 P(t)dt$.

1. *Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ est base de l'espace dual E^*.*
2. *Déterminer la base préduale de $\mathcal{F}$*

Exercice 0.9 *Dans $E = \mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathfrak{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, on considère $F = \{(x, y, z, t) \in E / 2x - y + z - 3t = 0\}$.*

1. *Montrer que F est un hyperplan de E.*
2. *En déduire sa dimension, puis donner une base.*
3. *Donner toutes ses équations et tous ses supplémentaires dans E.*